

La matematica che devi conoscere

Per l'attività che un progettista meccanico, sarà chiamato a svolgere, sono necessarie competenze matematiche, che andremo ad elencare nel seguito e per le quali daremo qualche esempio, rimandando ad un buon testo delle scuole superiori, i necessari approfondimenti e la didattica.

1. **Algebra:** Comprendere le equazioni lineari e quadratiche, i sistemi di equazioni, le funzioni e le loro proprietà. L'algebra è essenziale per risolvere problemi di ingegneria e per modellare situazioni reali.
2. **Geometria:** Conoscere le proprietà delle figure geometriche, i teoremi di base (come il teorema di Pitagora), e le trasformazioni geometriche. La geometria è importante per la progettazione e l'analisi delle strutture.
3. **Trigonometria:** Utilizzare le funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) per risolvere problemi relativi agli angoli e alle lunghezze dei lati nei triangoli. La trigonometria è cruciale per l'analisi delle forze e dei movimenti.
4. **Calcolo:** Avere una comprensione di base del calcolo differenziale e integrale. Questo include la derivazione e l'integrazione di funzioni, che sono fondamentali per l'analisi dei cambiamenti e delle aree sotto le curve.

1 L'algebra

Equazioni Lineari

Un'equazione lineare è un'equazione di primo grado, che può essere scritta nella forma: [$ax + b = 0$] dove (a) e (b) sono costanti.

Esempio: [$2x + 3 = 0$]

Per risolvere questa equazione, isoliamo (x): [$2x = -3$] e poi: [$x = \frac{-3}{2}$]

Equazioni Quadratiche

Un'equazione quadratica è un'equazione di secondo grado, che può essere scritta nella forma: [$ax^2 + bx + c = 0$] dove (a), (b) e (c) sono costanti e ($a \neq 0$).

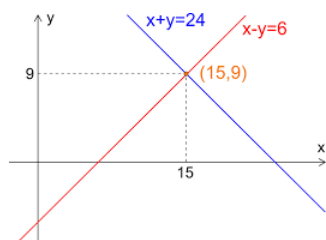
Esempio: [$x^2 - 5x + 6 = 0$]

Per risolvere questa equazione, utilizziamo la formula per le soluzioni dell'equazione di

secondo grado: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Quindi, le soluzioni sono: [$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = 3$] ; [$x_2 = \frac{5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = 2$]

Sistema di Equazioni di Primo Grado



(La soluzione è il punto di intersezione di due rette)

Un sistema di equazioni di primo grado è un insieme di due o più equazioni lineari che devono essere soddisfatte contemporaneamente. Un esempio comune è:

$$[2x + 3y = 6]$$

$$[x - y = 1]$$

Per risolvere questo sistema, possiamo usare il metodo di sostituzione o il metodo di eliminazione. Ecco come risolverlo usando entrambi i metodi:

1. **Moltiplichiamo la seconda equazione per due**, per allineare i coefficienti di (x):

2. $[2x + 3y = 6]$

3. $[2x - 2y = 2]$

2. **Sottraiamo la seconda equazione dalla prima** per eliminare (x):

$$[(2x + 3y) - (2x - 2y) = 6 - 2]; [5y = 4]; [y = \frac{4}{5}]$$

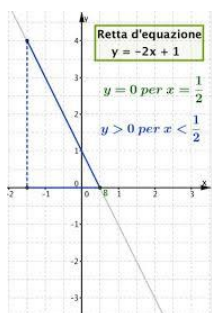
3. **Sostituiamo il valore di (y) nella seconda equazione** per trovare (x):

4. $[x - \frac{4}{5} = 1 \rightarrow x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{5+4}{5} = \frac{9}{5}]$

Quindi, la soluzione del sistema è: $[x = \frac{9}{5}; y = \frac{4}{5}]$

Funzioni e loro proprietà

Funzione Lineare



(La rappresentazione sul piano (0,x,y) è una retta)

Una funzione lineare è una funzione del tipo: $[f(x) = mx + b]$ dove (m) è il coefficiente angolare e (b) è l'intercetta.

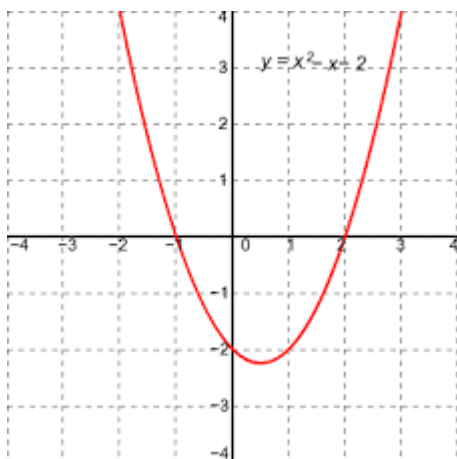
(La sua rappresentazione sul piano cartesiano è una retta che forma un angolo (α) con l'asse positivo delle x, tale che: $\tan \alpha = m$ ed interseca l'asse delle y, nel punto di coordinate $[0,b]$).

Esempio: $[f(x) = 2x + 3]$

Proprietà:

- **Dominio:** Tutti i numeri reali $\{R\}$.
- **Intervallo:** Tutti i numeri reali $\{R\}$.
- **Intercetta y:** $(f(0) = 3)$.
- **Crescente/Decrescente:** Crescente se $(m > 0)$, decrescente se $(m < 0)$.

Funzione Quadratica



(La rappresentazione sul piano $(0,x,y)$ è una parabola)

Una funzione quadratica è una funzione del tipo: $[f(x) = ax^2 + bx + c]$ dove (a), (b) e (c) sono costanti e $(a \neq 0)$.

(La sua rappresentazione sul piano cartesiano è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice nel punto di coordinate $[x = -\frac{b}{2a}; y = f(-\frac{b}{2a})]$, quindi l'asse di simmetria è la retta verticale che passa per il vertice della parabola, data da $[x = -\frac{b}{2a}]$ ed intercetta l'asse y nel punto $[y=c]$. La concavità della parabola è poi: rivolta verso l'alto per $[a>0]$ e verso il basso per $[a<0]$).

Esempio: $[f(x) = x^2 - 4x + 4]$

Proprietà:

- **Dominio:** Tutti i numeri reali $\{R\}$.
- **Intervallo:** Tutti i numeri reali positivi $[0, +\infty]$.

- **Vertice:** $((2, 0))$.
- **Concavità:** Rivolta verso l'alto se $(a > 0)$, rivolta verso il basso se $(a < 0)$.

Funzione Esponenziale

Una funzione esponenziale è una funzione del tipo: $[f(x) = a^x]$ dove (a) è una costante positiva diversa da 1.

Esempio: $[f(x) = 2^x]$

Proprietà:

- **Dominio:** Tutti i numeri reali $\{R\}$.
- **Intervallo:** Tutti i numeri reali positivi $[0, +\infty]$.
- **Intercetta y:** $(f(0) = 1)$.
- **Crescente/Decrescente:** Crescente se $(a > 1)$, decrescente se $(0 < a < 1)$.

Funzione Logaritmica

Una funzione logaritmica è una funzione del tipo: $[f(x) = \log_a (x)]$ dove (a) è una costante positiva diversa da 1.

Esempio: $[f(x) = \log_2 (x)]$

Proprietà:

- **Dominio:** Tutti i numeri reali positivi $[0, +\infty]$.
- **Intervallo:** Tutti i numeri reali $\{R\}$.
- **Intercetta x:** $(f(1) = 0)$.
- **Crescente/Decrescente:** Crescente se $(a > 1)$, decrescente se $(0 < a < 1)$.

Visto che abbiamo introdotto la funzione Logaritmica, spendiamo alcune parole per parlare dei **logaritmi**.

Per farlo, elenchiamo prima alcune proprietà degli esponenziali:

- Dalla moltiplicazione tra due potenze con la stessa base, si ottiene una potenza con la stessa base e con esponente uguale alla somma degli esponenti:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{Esempio: } 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

- Dalla divisione tra due potenze con la stessa base, si ottiene una potenza con la stessa base e con esponente uguale alla differenza degli esponenti:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{Esempio: } \frac{3^5}{3^3} = 3^{5-2} = 3^2 = 9$$

- Dalla potenza di una potenza, si ottiene una potenza con la stessa base e con esponente uguale al prodotto dei due esponenti:

$$(b^x)^y = b^{x \cdot y} \quad \text{Esempio: } (4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$$

- Dalla radice ennesima (n) di una potenza, si ottiene una potenza con la stessa base e l'esponente che si ottiene, dividendo l'esponente della potenza per (n):

$$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}} \quad \text{Esempio: } \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

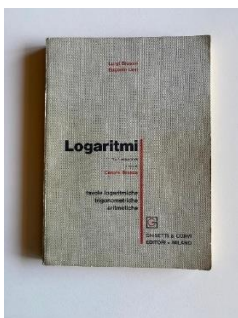
Fatto questo, annunciamo che i **logaritmi**, nati dall'intuizione di John Napier (1550-1616), hanno permesso, di trasformare: le moltiplicazioni in somme, le divisioni in sottrazioni, le elevazioni a potenza in semplici moltiplicazioni di esponenti e l'estrazione di radici in divisioni di esponenti. **In che modo?** Adottando una base (la base del logaritmo) e trovando l'esponente (il logaritmo) da applicare alla base per ottenere un numero qualsiasi, secondo questo schema:

$$n = b^{\log_b n} \quad \text{Esempio: } 16 = 2^4 \text{ dove: } n=16, b=2 \text{ e } 4 = \log_2 16 \text{ (il logaritmo in base 2 di 16)}$$

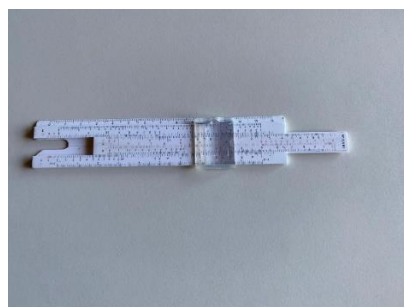
Così facendo e compilando le tavole dei logaritmi, nelle quali si trovava in corrispondenza di ogni numero il suo logaritmo, si eseguivano le varie operazioni, secondo il seguente schema:

- Moltiplicazione $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$
- Divisione $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- Potenze $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$
- Radici $\log_b \sqrt[n]{a^x} = \frac{x}{n} \cdot \log_b a$

Praticamente: si estraevano dalle tabelle i logaritmi dei termini delle operazioni, poi si eseguivano le operazioni tra i logaritmi, per poi tornare nelle tabelle a ricavare l'antilogaritmo, cioè il numero corrispondente al logaritmo del risultato. A quei tempi, fino ad epoche recenti (anni 60 del secolo scorso), hanno permesso di sveltire notevolmente i calcoli sopra elencati: con le tavole dei logaritmi, si potevano risolvere equazioni complesse, ed il regolo calcolatore aveva il ruolo, ricoperto oggi dalle calcolatrici da tavolo.



Tavole dei logaritmi

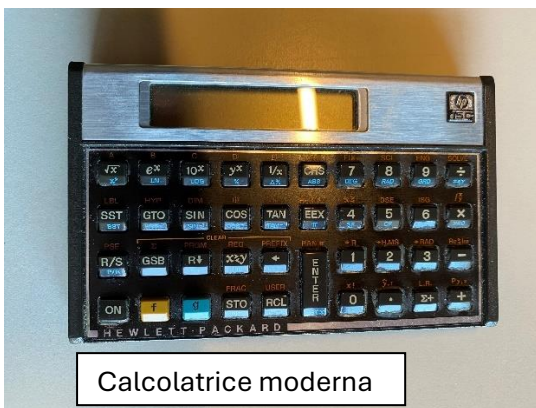


Regolo calcolatore

🌐 Applicazioni moderne dei logaritmi

- **Informatica:** I logaritmi sono usati per analizzare la complessità degli algoritmi (es. la ricerca binaria ha complessità logaritmica).
- **Fisica e ingegneria:** Si usano per descrivere fenomeni esponenziali come il decadimento radioattivo, la crescita batterica o la scala Richter dei terremoti.
- **Economia e finanza:** I logaritmi aiutano a modellare tassi di crescita, interessi composti e rendimenti.
- **Musica e acustica:** La scala dei decibel è logaritmica, così come la percezione del suono.

Nelle due immagini che seguono, vediamo una calcolatrice moderna ed i tasti che permettono di calcolare i logaritmi: (LN-logaritmi naturali in base e), (LOG-logaritmi in base 10) ed i tasti per gli antilogaritmi: (e^x) e (10^x).



In aggiunta a quanto scritto in precedenza, ritroveremo i logaritmi nel capitolo relativo al calcolo differenziale ed integrale, dove scopriremo alcune particolarità riservate ai logaritmi in base (e), i logaritmi naturali.

2 Geometria

Proprietà delle figure geometriche

📐 Proprietà del triangolo rettangolo

- **Teorema di Pitagora:** In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dove a e b sono i cateti e c è l'ipotenusa.

- **Altezza relativa all'ipotenusa (h):** L'altezza h relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili al triangolo originale.

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

- **Area (A):** L'area del triangolo rettangolo si calcola con:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

- **Angoli:** Uno degli angoli è sempre di 90°, mentre gli altri due sono acuti e complementari (la loro somma è 90°).

○ Cerchio

- **Raggio (r):** Distanza dal centro a un punto qualsiasi della circonferenza.
- **Diametro (d):** È il doppio del raggio: $d = 2 \cdot r$
- **Circonferenza (C):** Lunghezza del bordo del cerchio:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- **Area (A):** Superficie racchiusa dal cerchio:

$$A = \pi \cdot r^2$$

■ Quadrato

- **Lati:** Tutti e quattro i lati sono uguali.
- **Angoli:** Quattro angoli retti (90°).
- **Perimetro (P):** Somma dei lati:

$$P = 4 \cdot L$$

dove L è la lunghezza del lato.

- **Area (A):**

$$A = L^2$$

- **Diagonale (d):**

$$d = L \cdot \sqrt{2}$$

◆ Trapezio (in particolare trapezio rettangolo)

- **Basi:** Due lati opposti e paralleli (base maggiore B, base minore b).

- **Altezza (h):** Distanza tra le due basi.

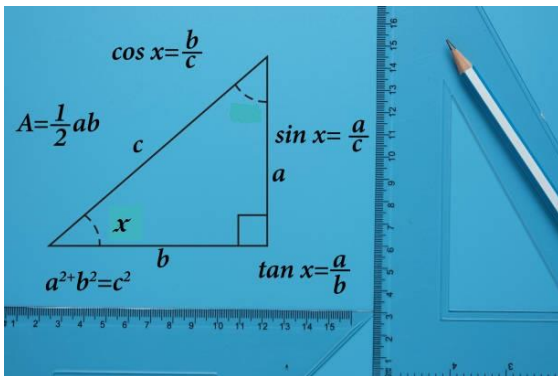
- **Area (A):**

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

- **Perimetro (P):** Somma dei quattro lati.
- **Angoli:** Può avere uno o due angoli retti, a seconda del tipo.

3 Trigonometria

La trigonometria è un ramo della matematica che studia le relazioni tra gli angoli e i lati dei triangoli, in particolare dei **triangoli rettangoli**.



Ecco le formule per risolvere i triangoli rettangoli:

$$a = c \cdot \sin x = b \cdot \tan x = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = c \cdot \cos x = \frac{a}{\tan x} = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c = \frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\cos x} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

▢ Concetti fondamentali

- **Funzioni trigonometriche:** Le principali sono:
 - **Seno (sin):** rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa.
 - **Coseno (cos):** rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa.
 - **Tangente (tan):** rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente.
- **Identità fondamentali:**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- **Applicazioni:**
 - Calcolo di distanze e altezze in geometria e topografia.
 - Studio delle onde in fisica (suono, luce, elettricità).
 - Navigazione, ingegneria, architettura e astronomia.

Riportiamo alcune formule utili per risolvere **le equazioni trigonometriche**, le quali coinvolgono le relazioni tra le funzioni di angoli diversi:

- **Addizione e sottrazione degli archi:**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \quad (\text{valida se } \alpha + \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \quad (\text{valida se } \alpha - \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ)$$

- **Duplicazione degli archi:**

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \quad (\text{Valida solo se } [\tan(\alpha) \neq \pm 1], \text{ cioè } \alpha \neq 45^\circ + k \cdot 90^\circ)$$

4 Calcolo

Per **Calcolo**, intendiamo il **calcolo differenziale ed integrale**. Cominciamo questa parte introducendo prima, il concetto di **limite per una funzione**, il quale è fondamentale nel calcolo differenziale e integrale. In parole semplici, il limite di una funzione descrive il comportamento della funzione quando l'input si avvicina a un certo valore, in simboli si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e significa che preso ad arbitrio un numero positivo (ε), è possibile determinare un numero positivo (δ), tale che, per tutti i valori di (x) diversi da (a) ed appartenenti all'intorno ($a - \delta$, $a + \delta$), risulti:

$$|L - f(x)| < \varepsilon$$

Ecco un esempio numerico:

Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ e si voglia calcolare il limite per ($x \rightarrow 1$). Il più delle volte è sufficiente sostituire nella funzione, il valore al quale tende la variabile indipendente, per ottenere il limite; in questo caso otterremmo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

ma $\left(\frac{0}{0}\right)$ è una forma indeterminata, proviamo allora a fattorizzare il numeratore, ottenendo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = x+1 = 1+1 = 2$$

Spesso per uscire dalle forme indeterminate, si ricorre (come in questo caso) alle fattorizzazioni e semplificazioni, fino ad ottenere il limite.

L'altro concetto importante è la **continuità** di una funzione che andiamo a definire:

Diremo che una funzione $y=f(x)$, definita in un intervallo (a,b) è continua in un punto x_0 di tale intervallo, se fissato un numero positivo (ε) , è possibile far corrispondere un numero positivo (δ) , in modo che, per ogni (x) interno all'intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, risulti:

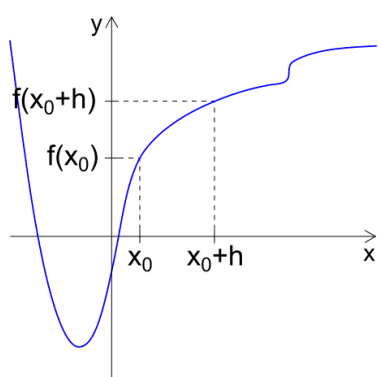
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Relazione che, tenendo presente la definizione di limite finito, può anche scriversi:

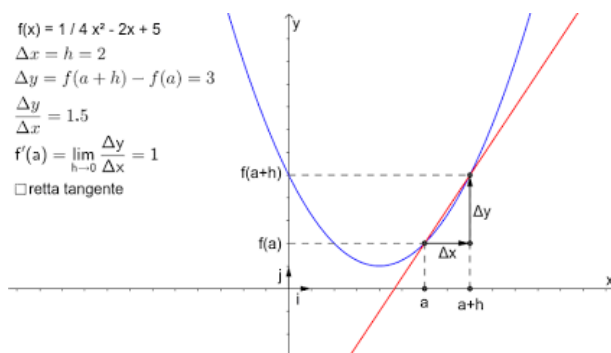
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione reale: $y=f(x)$ è continua in un intervallo, se in tutti i punti di esso è continua. La somma, la differenza, il prodotto, il quoziente di più funzioni continue in punto di ascissa x_0 , sono anch'esse funzioni continue in tale punto (*purché nel caso del quoziente, x_0 non annulli il denominatore*).

La **derivata** è una funzione che misura il tasso di cambiamento istantaneo di un'altra funzione, rappresentando la sua migliore approssimazione lineare in un punto specifico. Dal punto di vista geometrico, la derivata di una funzione in un punto corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto. Si calcola come limite del rapporto incrementale, ovvero il limite di $[(f(x+h) - f(x))/h]$ per h che tende a zero.



$$\begin{aligned} f(x) &= 1/4 x^2 - 2x + 5 \\ \Delta x &= h = 2 \\ \Delta y &= f(a+h) - f(a) = 3 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1.5 \\ f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \\ \square & \text{retta tangente} \end{aligned}$$



Per rapporto incrementale, si intende il rapporto tra queste due entità:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (\text{incremento della variabile dipendente } y)$$

$$\Delta x \quad (\text{incremento della variabile indipendente } x)$$

Cioè:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se al tendere di Δx a zero, esiste finito il limite del rapporto incrementale, la funzione: $y=f(x)$ dicesi derivabile nel punto di ascissa x , e tale limite chiamasi **derivata** della funzione in tal punto. La derivata viene solitamente indicata, con una delle seguenti notazioni:

$$y' ; \quad f'(x) ; \quad Df(x) ; \quad \frac{dy}{dx} ; \quad \dot{x}$$

e scriveremo:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esempio: Si voglia derivare la funzione $y = 2 \cdot x^2 - 4x$

Formiamo il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[2(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x)] - (2x^2 - 4x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 4x - 4\Delta x - 2x^2 + 4x}{\Delta x} = \frac{2\Delta x^2 + 4x\Delta x - 4\Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

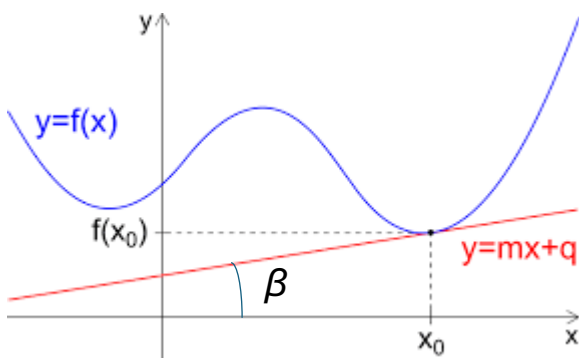
E calcoliamone il limite per $\Delta x \rightarrow 0$, ottenendo:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x^2 + 4x\Delta x - 4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x + 4x - 4) = 4x - 4$$

Pertanto, la **derivata** della funzione: $y = 2 \cdot x^2 - 4x$

è: $\frac{dy}{dx} = 4x - 4$

Significato geometrico della derivata



$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = m = \tan \beta$$

La derivata di una funzione, in un suo punto di definizione, rappresenta il coefficiente angolare (m), della retta tangente al grafico della funzione in quel punto.

Significato cinematico della derivata

Sia (P) un punto che si muove su una traiettoria rettilinea con moto vario, ed indicando con (s) lo spazio percorso (dopo aver fissato sulla traiettoria un'origine ed un verso), e con (t) il tempo impiegato a percorrerlo, dalla cinematica, è noto che lo spazio è funzione del tempo, cioè:

$$s = f(t)$$

Fissato un certo istante (t), consideriamo il moto del punto dal tempo (t) al tempo (t+Δt). Durante tale intervallo di tempo il punto ha percorso uno spazio dato da:

$$f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta s$$

Se il moto fosse uniforme, il rapporto:

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

Rappresenterebbe la velocità, che non varierebbe al variare di (Δt).

Se invece il moto è vario, il rapporto:

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

Rappresenta la velocità media del punto (P), nell'intervallo di tempo (Δt) considerato.

Pertanto, il rapporto incrementale della funzione: [s=f(t)] relativo allo spazio (Δs) percorso dal punto nell'intervallo di tempo (Δt), rappresenta la **velocità media** del punto mobile.

Cioè:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

Passando al limite, per (Δt→0), anche lo spazio (Δs) tenderà a zero e la (v_m) risulterà la velocità (v), all'istante (t) considerato. Cioè:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = v \quad \text{o anche:} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

Ossia: la **velocità** di un punto mobile (P), all'istante (t), è la derivata rispetto alla variabile tempo, della funzione: [s=f(t)].

Derivando la funzione [s=f(t)], otteniamo la funzione [v=v(t)], la quale derivata rispetto al tempo, ci fornisce l'**accelerazione**:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Altri significati della derivata:

- *L'intensità di una corrente elettrica* è la derivata della quantità di elettricità (Q) rispetto al tempo (t), cioè della funzione: $[Q=f(t)]$.
- *La potenza di una macchina* è la derivata del lavoro (L) rispetto al tempo (t), cioè della funzione: $[L=f(t)]$.
- *L'intensità di una forza* è la derivata del lavoro (L) rispetto allo spostamento (s), cioè della funzione: $[L=f(s)]$.

Derivate notevoli:

1. La derivata di una costante è zero: $\frac{dy}{dx}(k) = 0$ ($k=\text{costante}$)
2. La derivata della variabile indipendente x è 1: $\frac{dy}{dx}(x) = 1$
3. La derivata di x^n è $n \cdot x^{n-1}$: $\frac{dy}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$
4. La derivata di \sqrt{x} è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$: $\frac{dy}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. La derivata di $\sqrt[n]{x^m}$ è $\frac{m}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}$: $\frac{dy}{dx}(\sqrt[n]{x^m}) = \frac{m}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}$ (con $n > m$)
6. La derivata di $\sin x$ è $\cos x$: $\frac{dy}{dx}(\sin x) = \cos x$
7. La derivata di $\cos x$ è $-\sin x$: $\frac{dy}{dx}(\cos x) = -\sin x$
8. La derivata di $\log_a x$ è $\frac{1}{x} \cdot \log_a e$: $\frac{dy}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
quindi: $\frac{dy}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$ essendo $\log_e e = 1$ (motivo per il quale è preferibile l'utilizzo dei logaritmi neperiani).
9. La derivata di e^x è e^x : $\frac{dy}{dx} e^x = e^x$
10. La derivata di $\frac{\sin x}{x}$ è 1: $\frac{dy}{dx}(\sin x) = 1$

Teoremi sulle derivate:

1. La derivata della **somma** di due, o più funzioni, derivabili nel punto di ascissa x , esiste ed è uguale alla **somma delle derivate** delle funzioni stesse:
$$F(x) = f(x) + g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} F(x) = \frac{dy}{dx} f(x) + \frac{dy}{dx} g(x)$$
2. La derivata della **differenza** di due funzioni, derivabili nel punto di ascissa x , esiste ed è uguale alla **differenza delle derivate** delle funzioni stesse:
$$F(x) = f(x) - g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} F(x) = \frac{dy}{dx} f(x) - \frac{dy}{dx} g(x)$$
3. La derivata del **prodotto** di due funzioni, derivabili nel punto di ascissa x , esiste ed è uguale al prodotto della prima funzione per la derivata della seconda, più il prodotto della seconda funzione per la derivata della prima:
$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} F(x) = f(x) \cdot \frac{dy}{dx} g(x) + \frac{dy}{dx} f(x) \cdot g(x)$$

4. La derivata del **prodotto di una costante** per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:

$$F(x) = k \cdot f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} F(x) = k \cdot \frac{dy}{dx} f(x)$$

5. La derivata della **potenza ennesima** di una funzione è uguale; al prodotto dell'esponente (n), per la funzione elevata ad (n-1) e poi per la derivata della funzione:

$$F(x) = \{f(x)\}^n \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} F(x) = n \cdot \{f(x)\}^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} f(x)$$

6. La derivata del **quoziente** di due funzioni, derivabili nel punto di ascissa x (e con il denominatore diverso da zero), esiste ed è uguale alla derivata del numeratore per il denominatore (non derivato), meno la derivata del denominatore per il numeratore (non derivato), tutto diviso per il quadrato della funzione al denominatore:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx} F(x) = \frac{\frac{dy}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dy}{dx} g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

7. La derivata di una **funzione di funzione**:

$y = f\{\varphi(x)\}$, $[t = \varphi(x)]$ rispetto alla variabile (x), è data dal prodotto della derivata di (y) rispetto a (t), per la derivata di (t) rispetto ad (x), cioè:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Differenziale di una funzione

Nello studio delle funzioni, ed in generale, nello studio di un qualunque fenomeno regolato da una determinata legge, è essenziale *conoscere il comportamento della variabile dipendente (y), in relazione alla variazione della variabile indipendente (x)*; è appunto la conoscenza di tale comportamento, che ci fornisce una chiara visione, dell'andamento della curva o del fenomeno. A tal fine è di fondamentale importanza nell'analisi matematica, considerare il **differenziale** di una funzione, che definiamo senza tanti fronzoli, come il prodotto della derivata della funzione $[y=f(x)]$ per il differenziale (dx) della variabile dipendente (x):

se: $y = f(x)$ il differenziale della funzione sarà: $dy = \frac{dy}{dx} f(x) \cdot dx$

Esempio: Si voglia trovare il differenziale della funzione $y = \sin x$

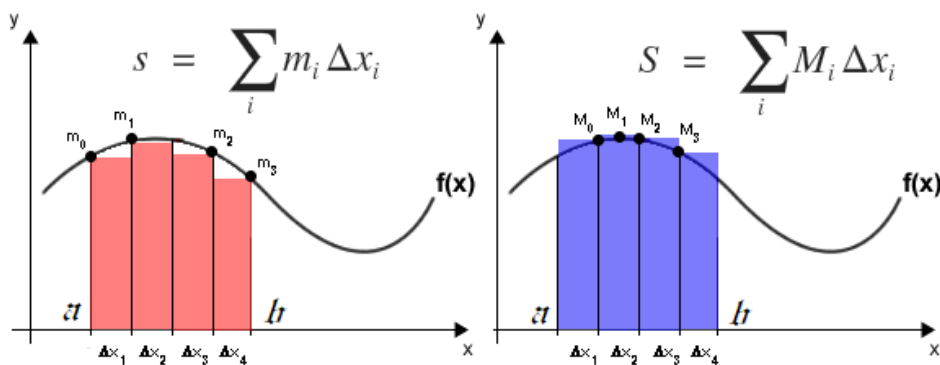
avremo: $dy = (\cos x) \cdot dx$ dove: $\cos x = \frac{dy}{dx} (\sin x)$

Nota: Le regole ed i teoremi per la differenziazione, sono le stesse di quelle per la derivazione, sostituendo semplicemente alla parola derivata, quella di differenziale.

L'integrale definito e l'integrale indefinito rappresentano un'altra importante applicazione del concetto di limite. L'introduzione e lo studio degli integrali nascono dall'esigenza di risolvere i seguenti problemi:

1. La **quadratura** di una superficie, cioè il problema della determinazione dell'area di una qualsiasi superficie a contorno irregolare.
2. La **cubatura** di solidi, cioè la determinazione del volume di un qualsiasi solido.
3. La determinazione della **lunghezza di un arco**.
4. La ricerca della **funzione primitiva** vale a dire, la determinazione di quelle funzioni che hanno, come derivata, la funzione data.

Definizione di integrale definito



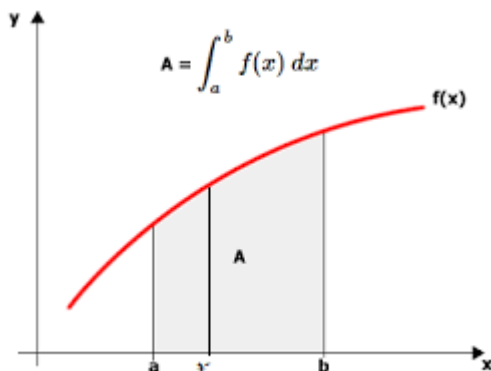
Definiamo l'integrale definito, iniziando dal primo problema (**la quadratura**), ricercando l'area sottesa dalla curva $[y=f(x)]$ nell'intervallo $(a < x < b)$. Un modo per ottenerla in modo approssimato è quello di suddividere l'intervallo (a, b) con rettangoli di base: $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, non necessariamente uguali e calcolare le due somme rappresentate in figura, nelle quali gli (m_i) rappresentano i valori minimi assunti dalla funzione $[y=f(x)]$ negli intervalli (Δx_i) e gli (M_i) sono i valori massimi assunti dalla $[y=f(x)]$ negli stessi intervalli. La somma (s) fornirà un valore in difetto, mentre la (S) in eccesso e possiamo immaginare che più piccoli e numerosi saranno gli intervalli (Δx_i) , più le due somme tenderanno a convergere, verso il valore comune:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$$

In buona sostanza avremo che $[m_i, M_i \rightarrow f(x_i)]$; $[\Delta x_i \rightarrow dx]$ ed $[n \rightarrow \infty]$

Condizione necessaria affinché una funzione $y=f(x)$ sia integrabile nell'intervallo (a, b) è che ivi la stessa sia limitata, se poi in tale intervallo risulta anche continua, la condizione diventa anche sufficiente.

Definizione di integrale indefinito



Indicando con (x) un punto qualsiasi dell'intervallo (a,b) , l'integrale definito, relativo all'intervallo (a,x) , sarà:

$\int_a^x f(x)dx$ che al variare di (x) tra (a) e (b) risulta funzione di (x) , potendosi scrivere:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)$$

avendo indicato con $F(x)$ la nuova funzione che prende il nome di **funzione integrale** della $f(x)$ nell'intervallo (a,b) . Enunciamo senza dimostrazione che la funzione integrale $F(x)$ ammette derivata finita in qualsiasi punto (x) dell'intervallo (a,b) , cioè:

$\frac{dy}{dx} F(x) = f(x)$ affermiamo anche, che la funzione $f(x)$ continua in (a,b) , ammette infinite primitive, tutte date da:

$F(x) + c$ con (c) costante arbitraria; od anche date da:

$$\int_a^x f(x)dx + c$$

Per quanto appena detto, la precedente espressione per (x) variabile in tutto l'intervallo (a,b) , rappresenta una famiglia di funzioni della (x) , dipendente dalla costante (c) e si chiama **integrale indefinito**.

L'integrale indefinito viene indicato con la scrittura: $\int f(x)dx$ e si differenzia per aver ommesso gli estremi di integrazione.

Quindi abbiamo:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Esempio: Troviamo l'integrale indefinito della funzione: $\left[y = \frac{1}{x} \right]$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \log x + c \quad \text{appunto perché:} \quad \frac{dy}{dx} (\log x + c) = \frac{1}{x}$$

Alla pagina seguente ho riportato l'elenco degli integrali indefiniti più noti.

$\int f(x) \text{ integrale}$	$F(x) \text{ primitiva}$	$\int f(x) \text{ integrale}$	$F(x) \text{ primitiva}$
$\int x dx$	$\frac{x^2}{2} + c$	$\int \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\begin{cases} \pm \arcsin x + c \\ \mp \arccos x + c \end{cases}$
$\int a dx$	$ax + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	$\log x+\sqrt{x^2-1} + c$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$\int \frac{1}{a^x} dx$	$-\frac{a^{-x}}{\log a} + c$
$\int \frac{x}{x^2+1} dx$	$\frac{1}{2} \log x^2+1 + c$	$\int \frac{1}{x^n} dx$	$-\frac{n-1}{x^{n-1}} + c$
$\int a \cdot x^n dx$	$\frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{a+x^2} dx \quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} + c$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\log x + c$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	$2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$\begin{cases} \operatorname{arSh} x + c \\ \log x+\sqrt{1+x^2} + c \end{cases}$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$	$\int \sin^2 x dx$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$	$\int \cos^2 x dx$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$
$\int \tan x dx$	$-\log(\cos x) + c$	$\int \frac{1}{\tan x} dx$	$\log \sin x + c$
$\int \arcsin x dx$	$\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$	$\log x+\sqrt{x^2 \pm a^2} + c$
$\int \arccos x dx$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log x+\sqrt{x^2 \pm a^2} + c$
$\int e^{\pm kx} dx$	$\pm \frac{e^{\pm kx}}{k} + c$	$\int \frac{1}{e^{kx}} dx$	$-\frac{e^{-kx}}{k} + c$
$\int \frac{1+\tan^2 x}{\cos^2 x} dx =$	$\tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\log \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + c$
$\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx =$	$-\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\log \left \tan \frac{x}{2} \right + c$
$\int \operatorname{Sh} x dx$	$\operatorname{Ch} x + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx$	$\frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2-x^2} \right) + c$
$\int \operatorname{Ch} x dx$	$\operatorname{Sh} x + c$	$\int \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x} dx =$ $\int (1-\operatorname{Th}^2 x) dx + c$	$\operatorname{Th} x + c$
$\int \frac{2x}{x^2+1} dx$	$\log(x^2+1) + c$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

Formula fondamentale del calcolo integrale

Senza girarci tanto intorno e senza dimostrazione, riportiamo la regola per il calcolo degli integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

che può anche scriversi:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

L'integrale definito in un intervallo (a,b) di una funzione: $y=f(x)$, limitata e continua, si ottiene facendo la differenza tra il valore che una qualsiasi primitiva della $f(x)$ assume in (b) e quello che assume in (a).

Esempio 1: Si voglia calcolare: $\int_0^3 (2x + 1)dx$

$$\int_0^3 (2x + 1)dx = \int_0^3 2x dx + \int_0^3 1 \cdot dx = [x^2]_0^3 + [x]_0^3 = 9 + 3 = 12$$

Esempio 2: Si voglia calcolare: $\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \int_0^4 -x^2 dx + 4 \int_0^4 x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

Nota finale: Questo documento non ha la pretesa di essere esaustivo sull'argomento proposto: "*La matematica che devi conoscere*", nel senso che gli argomenti presentati, richiedono di essere approfonditi, su di un buon testo delle scuole superiori ad indirizzo tecnico, sia per completare il ventaglio dei teoremi e delle proprietà, sia per esercitare le proprie capacità con ulteriori esercizi.
